Niveau(x) d'enseignement: 4 Numéro EDUQ : 8670132
Centre d'intérêt: 841

Davidson, André.

Logique / doc. préparé par André Davidson, René Parenteau ; [pour le Ministère de l'éducation, Direction générale de programmes et la Direction générale des régions]. -- [Québec]: Les Directions, 1985.
26 p. ; 28 cm. -- (Matériel de soutien à l'imp.antation des programmes du secondaire)

La couv. porte en outre: Mathématiques, option 1, plan de cours. Code: 16-3303-02. Comprend des bibliogr.

Vedette(s)-secondaire(s): Parenteau, André * Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des programmes * Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des régions

Descripteur(s): Mathématiques * Logique * Plan de cours * Programme d'enseignement * Activité d'apprentissage * Guide pédagogique * Secondaire (Ordre d'enseignement)

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option I en mathématiques au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants. Le document porte sur la logique. Il s'adresse à la clientèle du cours de mathématique 434 et couvre douze périodes de cinquante minutes. L'objectif terminal du cours est de résoudre des problèmes employant des propositions. A partir d'une mise en situation simple, le document propose huit activités d'apprentissage et divers exercices qui permettant d'acquérir les habiletés décrites dans les objectifs intermédiaires.

Type de document: d
Notice(s) connexe(s): 8670133, 8670134, 8670135

129.53

EDUQ 8670132

16-3303-02

Gouvernement du Québec
Ministère de l'Éducation
Direction générale des programmes
Direction générale des régions

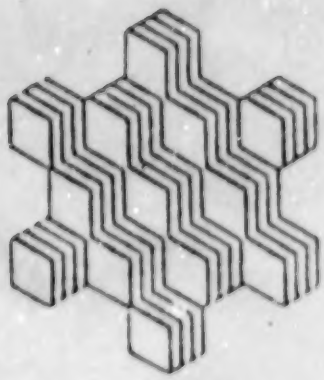
MATÉRIEL DE SOUTIEN À L'IMPLANTATION DES PROGRAMMES DU SECONDAIRE

MATHÉMATIQUE

OPTION I

PLAN DE COURS

LOGIQUE



DÉCEMBRE 1985

LOGIQUE

Document préparé par: André Davidson
René Parenteau

EDUQ 8670132

AVANT-PROPOS

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option I (064-434) en mathématique au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants.

Voici la liste des documents qui ont été rédigés.

NUMÉRO	TITRE	AUTEURS
16-3303-02	La logique	André Davidson René Parenteau
16-3303-03	Les ensembles de nombres et les ensembles	Francine Collin André Davidson Pierre Mathieu
16-3303-04	L'algèbre des réels	Pierre Mathieu Hélène Tessier
16-3303-05	Les relations et les fonctions	Robert Mercier Jean Saumier
16-3303-06	La géométrie analytique et l'algèbre du cours 414*	Jean-Luc Bombardier Pierre Mathieu
16-3303-07	Les coniques	Paul Patenaude Rosa Maria Sandoval
16-3303-08	Les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques	Denis De Champlain Marcel Mius D'Entremont Jean Matte

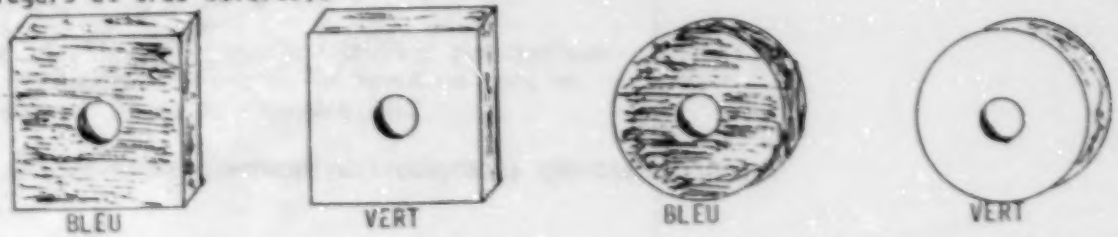
*Il est possible de se procurer la carte murale mentionnée dans ce document en communiquant avec: Monsieur Pierre Mathieu
C.S.R. Yamaska
2270 avenue Malhiot
ST-HYACINTHE (Québec)
J2S 4G3
Tél: (514) 773-8401

Le contenu de ces documents n'engage que les auteurs. Tout organisme scolaire qui le souhaite est autorisé à reproduire ces documents à condition d'en préciser la source.

Présentation

Cette section s'adresse à la clientèle du cours de mathématique 434. On lui alloue douze (12) périodes de cinquante (50) minutes.

Comme mise en situation, nous avons opté pour un moyen simple, peu dispendieux, mais qui a l'avantage d'être visuel et palpable: un jeu de quatre (4) blocs (voir ceux de Fisher Price, de matière plastique, très légers et très colorés).



C'est notre ensemble référentiel pour la section LOGIQUE: {CB, CV, RC, RV}

P.S.: Les couleurs peuvent être autres, mais il est fortement conseillé d'en prendre une «foncée» et une «pâle» ou bien de travailler avec un carré troué et un plein de même qu'une rondelle trouée et une pleine, au cas où certains élèves seraient daltoniens.

OBJECTIF TERMINAL 1.1

Résoudre des problèmes employant des propositions.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 1: **Distinguer entre proposition et forme propositionnelle (1 cours).**

Dans un sac, vous avec déposé un bloc bleu (à l'insu des élèves). Vous posez la question suivante:

«Il est bleu». VRAI ou FAUX?

Les élèves ne peuvent répondre car ils ne savent même pas ce dont on parle.

L'enseignant pose alors la question:

«Le bloc est vert». VRAI ou FAUX?

On amène alors les élèves à réaliser le fait que quelque soit la couleur du bloc, lorsqu'on le verra on sera en mesure de répondre VRAI ou de répondre FAUX.

Si maintenant l'enseignant leur montre le bloc, la réponse est: FAUX.

On peut alors leur poser la question:

«Le bloc est beau». VRAI ou FAUX?

Ceci pour constater que certaines réponses seront: «VRAI» et certaines autres: «FAUX».

Et pourquoi ne pas ajouter la question suivante:

«Qu'il est gros!». VRAI ou FAUX?

De façon à ce qu'ils réalisent qu'un tel énoncé n'amène pas de réponse «VRAI» ou «FAUX», étant donné qu'on exprime un sentiment ou une impression ressentie intérieurement.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE ($^{1.1.1}_{1.3.1}$): Des énoncés étant donnés, identifier ceux qui sont des propositions simples ou des formes propositionnelles simples.	PAGE - 4 -

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Toute cette démarche doit déboucher sur:

Un énoncé de fait (déclaratif) auquel correspond nécessairement un seul des deux (2) qualificatifs suivants: VRAI ou FAUX est une proposition.

A ces propositions, on attache une valeur de vérité notée 1 ou V (si elle est vrai) et 0 ou F (si elle est fausse) et nous noterons les propositions par des lettres telles que: p, q, r, ... etc.

Remarque: Est donc exclue de cette définition toute expression (toute phrase) de type exclamatif ou interrogatif de même que toute expression renfermant une (ou plusieurs) variable(s), que ce soit une variable littérale (il, elle.. ou une variable algébrique (x, y, ...). Ces dernières (i.e. les expressions qui renferment une une ou plusieurs variables) sont dites des formes propositionnelles car ce sont des «p'tits moules» à propositions, des propositions en devenir, étant donné que lorsqu'on remplace la (ou les) variable(s) par une constante du référentiel, elles deviennent alors des propositions. (Ex.: une «forme» à solage de maison)

Nous les noterons P(x), R(x), S(x), ..., P(y), ... etc. selon que la variable est x ou y ou autre.

EXERCICES ET REFERENCES

1) Dis si les énoncés suivants sont des propositions, des formes propositionnelles ou ni l'une ni l'autre:

   a) Nous sommes aujourd'hui lundi.

   b) $4 + 3 = 43$

   c) Il y a un nombre infini de nombres premiers.

   d) $x + 3 > 7$

   e) Elle est avocate.

   f) Colomb découvrit l'Amérique en 1492.

   g) Il y aura une éclipse totale du soleil le 11 juillet 1991 à Hawaï.

   h) Lady Diana est une jolie femme.

A noter que les exercices (f) et (g) sont des propositions car, en soit, ce sont des énoncés déclaratifs qui sont, soit VRAI, soit FAUX, même si nous n'avons pas les connaissances requises pour juger leur valeur de vérité. Ce n'est pas nécessaire pour obtenir une proposition.

Cependant, l'exercice (h) n'est pas une proposition car il se peut qu'il y ait des réponses «VRAI» ou des réponses «FAUX»; ce type d'énoncés n'est donc pas à inclure dans la définition de proposition de même qu'un énoncé renfermant des couleurs non

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
précises (cheveux châtains...) ou des qualités (intelligent...).	
	Eléments de maths modernes, Lidec, page 1, série 1.1 Algèbre 3, Editions Vaudreuil Inc., page 13, no 1 La logistique, Marcel Schoos, page 90, nos 1 et 2 Langage logique, Permama (3001), pages 1 à 6 Logique, SOEM-71-D06, M5-F-02, feuilles 02 à 05 Logique et ensembles, Permama-1 (cahier), page 2, nos 1 à 3 F.I.C. (522-532), page 12, nos 1 à 4

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (1.1.1 (suite) / 1.1.2 / 1.3.1 (suite)): Définir les connecteurs logiques sur les propositions et les formes propositionnelles.	PAGE - 6 -

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 2: Distinguer entre proposition simple et proposition composée (idem pour forme propositionnelle) (1 cours).

L'enseignant montre le bloc rond bleu et dit:
«Le bloc est rond», ... ce qui est une proposition VRAIE.
«Le bloc est vert», ... ce qui est une proposition FAUSSE.

Puis il dit:
«Le bloc est rond et le bloc est vert».
. Est-ce d'abord une proposition?... Pourquoi?
. Est-elle VRAIE ou FAUSSE?

Discussion!

Cette démarche est en vue d'en arriver au concept de proposition composée (i.e. une proposition formée de plusieurs propositions simples unies entre elles par un connecteur).

Les principaux connecteurs sont:
- La négation $\neg$ (ne pas)
- La conjonction $\wedge$ (et)
- La disjonction $\vee$ (ou)
- La conditionnelle $\rightarrow$ (si... alors)
- La biconditionnelle $\leftrightarrow$ (si et seulement si)

L'élève doit être capable de traduire du langage en symboles (et vice-versa) des propositions données.

1) Dis si les propositions suivantes sont simples ou composées:
   a) L'Alberta n'est pas une province du Canada.
   b) Ayant réussi tous ses examens, Lyne a été admise au Cegep.

2) A) Etant donné que p est la proposition: «Jean étudie» et que q est la proposition: «Lucie est malade», traduis symboliquement les propositions suivantes:
   a) Jean étudie et Lucie est malade.
   b) Lucie n'est pas malade.
   c) Si Jean étudie alors Lucie est malade.
   d) Jean n'étudie pas ou Lucie n'est pas malade.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Attention!!!
Beaucoup de problèmes dans ces exercices utilisent des propositions du genre «Jean est gentil et poli»,
Est-ce vraiment une proposition?
Y a-t-il des critères uniformes de gentillesse et de politesse?
C'est aux enseignants de bien choisir les exercices pour éviter des ambiguïtés.

EXERCICES ET REFERENCES

e) Jean étudie si et seulement si Lucie est malade.

B) Etant donné les propositions suivantes:
p: «Le bloc est bleu»
q: «Le bloc est carré»,
traduis symboliquement les propositions ci-dessous:

a) Si le bloc est carré alors le bloc n'est pas bleu.

b) Le bloc est bleu si et seulement si le bloc n'est pas carré.

3) Etant donné les propositions suivantes:
p: «Il n'y a pas de nuages»
q: «Il pleut»,
écris en mot les propositions suivantes:

a) $\neg p$ b) $p \rightarrow \neg q$ c) $q \vee p$

Eléments de maths modernes,
page 2, série 1.2 (1-2-6)
page 4, série 1.3 (1)
page 9, série 1.5 (3-4)

Algèbre 3, page 13, nos 2 et 3

La logistique, page 99, nos19 à 25

Langage logique, page 2-8, page 2-12

Logique SOEM, feuilles 07-08

Langage logique et ensembliste, Permama II, page M-1.2.6, no 9

F.I.C., page 13, nos 5 à 10

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 3: Etude des cinq (5) connecteurs (connectifs) (3 cours).

L'enseignant énonce la proposition suivante:
«L'objet retiré n'est pas bleu».

Dans un sac, il a auparavant déposé un bloc bleu et un bloc vert. Il tire au hasard un des deux (2) blocs et les élèves doivent donner la valeur de vérité de la proposition ci-haut. Il tire alors l'autre bloc et les élèves donnent encore la valeur de vérité de la proposition ci-haut.

On constate alors qu'une négation (i.e. une proposition composée renfermant le connecteur $\neg$) est soit VRAIE, soit FAUSSE, selon la valeur de vérité que possède l'affirmation (i.e. la proposition simple).

On peut donc écrire:
La proposition $\neg p$ (l'objet n'est pas bleu) est vraie lorsque la proposition p (l'objet est bleu) est fausse, tandis que $\neg p$ est fausse lorsque p est vraie. On symbolise cette situation par un tableau appelé table de vérité:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Une proposition simple amène donc deux (2) lignes dans la table de vérité, puisqu'il y a deux (2) cas à envisager selon que la proposition simple est vraie ou selon qu'elle est fausse.

L'enseignant dépose ensuite dans le sac les quatre (4) blocs (carré bleu, carré vert, rond bleu, rond vert) et il énonce: «L'objet retiré est rond et bleu».

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

(i.e. l'objet retiré est rond et l'objet retiré est bleu). Le tableau suivant peut alors être rempli selon le bloc tiré au hasard:

p: «L'objet est rond»
q: «L'objet est bleu»

	p	q	p∧q
1er cas:	1	1	
2e cas:	1	0	
3e cas:	0	1	
4e cas:	0	0	

1er cas: rond et bleu
2e cas: rond et non bleu
3e cas: non rond et bleu
4e cas: non rond et non bleu

A chaque fois que l'enseignant tire au hasard un bloc, il demande à l'élève de quel cas il s'agit et quelle sera la valeur de vérité de la proposition composée «p∧q» dans ce cas.

Très vite, les élèves vont compléter la 3e colonne de la table de vérité par: 1
0
0
0

i.e. qu'ils vont se rendre compte qu'une conjonction est vraie lorsque les deux (2) propositions simples sont vraies simultanément. On notera, à l'avenir, la table de vérité de la façon suivante:

p	∧	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

dans laquelle la colonne du milieu (si possible en couleur) représente le résultat, i.e. les valeurs de vérité de la conjonction dans chacun des quatre (4) cas possibles lorsqu'on a deux (2) propositions simples au départ.

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

On peut recommencer la démarche avec les quatre (4) blocs en utilisant le connecteur («ou» inclusif).

On obtiendra ainsi la table de vérité suivante:

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

et qui se traduit par:

La disjonction de deux (2) propositions simples est vraie lorsqu'au moins une des deux (2) propositions est vraie.

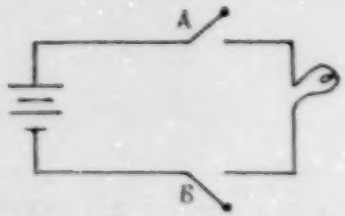
N.B.: - On peut en profiter ici pour faire la distinction entre la disjonction inclusive ($\vee$) et la disjonction exclusive ($\underline{\vee}$) qui elle n'est vraie que lorsqu'une seule des deux (2) propositions simples est vraie. Faire remarquer qu'en français, très souvent on utilise le «ou» exclusif.

- On peut également profiter de la situation pour faire remarquer aux élèves que la conjonction et la disjonction inclusive sont présentes dans les situations concrètes de:

. circuit en série (en électricité)

Si les deux (2) interrupteurs A et B sont fermés, alors le courant revient à la source et la lumière s'allume; c'est la CONJONCTION!

Circuit en série

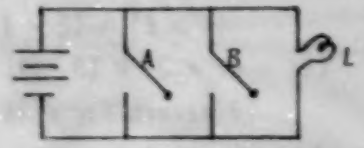


ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

. circuit en parallèle

Si un des deux (2) [ou les 2] interrupteurs A et B sont fermés, alors le courant revient à la source et la lumière s'allume; c'est la DISJONCTION!

Circuit en parallèle



- Il est bon aussi de faire remarquer aux élèves que lorsqu'on a deux (2) propositions simples au départ, la table de vérité contient quatre (4) lignes puisqu'il y a, en fait, quatre (4) possibilités de combiner nos valeurs de vérité des deux (2) propositions simples.

et si on partait avec trois (3), avec quatre (4), ..., etc??? Avec «n» propositions, on obtiendrait 2n lignes!

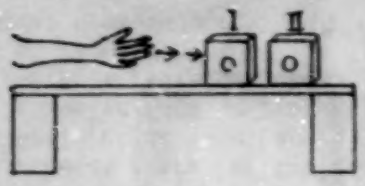
Nombre de propositions simples	Nombre de lignes
1	2
2	4
3	...
4	...
:	
n	...

- On peut continuer la démarche et faire les tables de vérité de la conditionnelle et de la biconditionnelle tout de suite (comme le font la plupart des volumes) ou bien attendre et faire des exercices sur la conjonction et la disjonction. Il faut alors les choisir parmi ceux suggérés pour cette section.

Pour ce qui est de la conditionnelle, on peut partir avec la proposition suivante:

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

«Si le bloc I tombe, alors le bloc II tombe»
et on voit qu'il y a un cas où c'est impossible: celui où le bloc I tomberait sans que le bloc II tombe.



Il semblerait donc que la conditionnelle est VRAIE dans trois (3) cas et FAUSSE dans un cas!

De la même façon, si nous l'expérimentons avec la proposition suivante:
«Si l'objet retiré est rond, alors il est bleu»,
nous aurons la table de vérité suivante:

p		q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Vraie parce que d'abord il est rond et en plus il est bleu!

Fausse parce que d'abord il est rond et en plus il n'est pas bleu!

Vraies!!! parce que d'abord il n'est pas rond, il peut donc être bleu ou vert ou toute autre couleur, on ne l'a pas dit dans notre énoncé!

Ce qu'on dit, c'est que s'il est rond, il doit être bleu!

Enfin, étant donné que la biconditionnelle est une conjonction de deux (2) conditionnelles, nous aurons:
«L'objet retiré est rond si et seulement si l'objet retiré est bleu» signifie:
«Si l'objet retiré est rond, alors il est bleu et si l'objet retiré est bleu, alors il est rond».

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Avec chacun des quatre (4) blocs, on fait la conjonction des deux (2) conditionnelles pour obtenir la table de la biconditionnelle:

	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$						$p \leftrightarrow q$	
Bloc rond et bleu	1	1	1	1	1	1	1	1
Bloc rond et non bleu	1	0	0	0	0	1	1	0
Bloc non rond et bleu	0	1	1	0	1	0	0	0
Bloc non rond et non bleu	0	1	0	1	0	1	0	1

Maintenant que les cinq (5) tables de vérité sont données, il suffit de les appliquer dans divers problèmes. Voir les exemples ci-contre:

Attention au jeu des parenthèses!

On peut même aller avec trois (3) propositions de départ, donc huit (8) lignes dans la table!

Eh! Oui! puisque les formes propositionnelles deviennent des propositions quand la variable est remplacée par une constante!

P(3) signifie: 3 + 2 9 puisqu'on a remplacé la variable x par la constante 3 dans la forme propositionnelle P(x).

EXERCICES ET REFERENCES

1) Ecris la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes:
   a) $(4 + 1 = 5) \wedge (3 < 7)$
   b) (2 divise 4) $\vee$ $(5 + 13 = 15)$
   c) $(2 > 3) \rightarrow \neg$(2 divise 5)
   d) Si la lune est faite de fromage, alors $2 = 5$

2) Construis la table de vérité des propositions suivantes:
   a) $\neg(p \rightarrow \neg q)$
   b) $p \leftrightarrow (q \wedge r)$
   c) $\left[(p \rightarrow q) \wedge r\right] \vee \left[r \leftrightarrow q\right]$

3) Le prof dit: «Si je gagne le million, alors je quitte l'école».
   Etant donné que cette proposition est vraie, que peux-tu conclure logiquement si:
   a) Le prof ne quitte pas l'école?
   b) Le prof ne gagne pas le million?

4) Soit les formes propositionnelles suivantes: $P(x)$: $x + 2 < 9$
   $Q(x)$: x est un nombre pair
   Quelle est la valeur de vérité de chacun des énoncés suivants?
   a) $P(3)$ c) $P(7) \vee Q(5)$
   b) $Q(6)$ d) $Q(4) \rightarrow P(5)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

N.B.: On peut en profiter pour mentionner que:
- la réciproque de $p \rightarrow q$ est la proposition: $q \rightarrow p$
- l'inverse de $p \rightarrow q$ est la proposition: $\neg p \rightarrow \neg q$
- la contraposée de $p \rightarrow q$ est la proposition: $\neg q \rightarrow \neg p$

Ex.: Soit la proposition: «Si je travaille alors je réussis».
- sa réciproque est: «Si je réussis alors je travaille».
- son inverse est: «Si je ne travaille pas alors je ne réussis pas».
- sa contraposée est: «Si je ne réussis pas alors je ne travaille pas».

N.B.: Il est important de ne pas faire un abus de construction de tables de vérité; cependant, il faudrait en faire suffisamment avant d'aborder les notions de:
- tautologie
- contradiction

EXERCICES ET REFERENCES

5) Quelle valeur de vérité faut-il attribuer aux propositions simples p et q pour que la proposition composée: $p \rightarrow (p \wedge \neg q)$ soit fausse?

Eléments de maths moderne, page 3 (3-4-5)
page 4 (7-8)
page 5 (2 à 8)
page 10 (6-7-8)

Algèbre 3, page 13, nos 5 à 13

La logistique, page 106 (33-34)
page 107 (35-36)
page 110, 111 et 114

Langage logique, pages 2-24 à 2-36

Logique SOEM, pages 18 à 24

Logique et ensembles, Permama-1, pages 20 à 23

F.I.C., page 51, nos 1 à 10
page 53, nos 1 à 5

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 4: Reconnaître une tautologie, une implication logique et une équivalence logique (2 cours).

A partir d'une table de vérité préalablement bien choisie, faire remarquer aux élèves qu'une proposition composée peut être toujours vraie.

Ex.: «Si l'objet retiré est rond alors il est rond ou bleu».

$p \rightarrow (p \vee q)$

En faisant cette table de vérité, on constate à la fin que cette proposition est toujours vraie (dans les 4 cas). On appelle une proposition toujours vraie une TAUTOLOGIE.

Par contre, si elle est toujours fausse, on l'appelle CONTRADICTION.

Ex.: «L'objet retiré est rond et l'objet retiré n'est pas rond».

N.B.: Si une conditionnelle est tautologique, on dira alors que l'antécédent (i.e. la 1re proposition) implique logiquement le conséquent (i.e. la 2e proposition). On remplacera, dans ce cas, le symbole $\rightarrow$ par le symbole $\Rightarrow$.

De même, si une biconditionnelle est tautologique, on dira que les deux (2) propositions sont logiquement équivalentes (i.e. si la 1re est vraie, la seconde le sera et si la 1re est fausse, la 2e le sera aussi). Le symbole $\leftrightarrow$ sera également remplacé par le symbole $\Leftrightarrow$

On peut également profiter de l'occasion (à l'aide des tables de vérité) pour faire remarquer que:

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

b) $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

1) Dis si les propositions suivantes sont des tautologies, des contradictions ou ni l'une ni l'autre:

a) $\neg(p \wedge \neg p)$

b) $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (q \vee p)$

c) $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow p$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
c) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *On appelle respectivement ces trois (3) propositions: la commutativité de la conjonction, l'associativité de la disjonction, la distributivité de la conjonction sur la disjonction.* d) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ Ex.: «Si l'objet retiré est rond alors il est bleu» est une proposition équivalente à «Si l'objet retiré n'est pas bleu alors il n'est pas rond». e) $(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$ Ex.: «Si l'objet retiré est bleu alors il est rond» est une proposition équivalente à «Si l'objet retiré n'est pas rond alors il n'est pas bleu». A titre d'enrichissement (si l'enseignant le désire), il peut vérifier avec ses élèves que l'équivalence logique est aussi une relation d'équivalence, i.e. une relation qui possède les propriétés de: - Réflexivité: $p \Leftrightarrow p$ «L'objet retiré est rond si et seulement s'il est rond». - Symétrie: Si $(p \Leftrightarrow q)$, alors $(q \Leftrightarrow p)$. - Transitivité: Si $[p \Leftrightarrow q$ et $(q \Leftrightarrow r)]$ alors $(p \Leftrightarrow r)$	Eléments de maths modernes, p. 10, série 1.6 p. 12, série 1.7 Algèbre 3, page 14, nos 14 à 17 La logistique, page 115, no 50 page 121, no 63 Langage logique, pages 3-23 à 3-41 F.I.C., page 62, nos 1 à 9 page 63, nos 1 à 5 (Attention, parmi ces numéros, garder les problèmes de négation pour l'item suivant).

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 5: Ecrire et vérifier les négations d'une proposition donnée (2 cours).

Soit p la proposition suivante: «L'objet retiré est rond».

Quelle est sa négation?

Il est fort probable que les élèves diront que $\neg p$ est: «L'objet retiré n'est pas rond».

Vérifions-en sa vérité avec le tableau suivant:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Allons-y maintenant avec la proposition: «L'objet retiré est rond et bleu», i.e. $(p \wedge q)$.

Quelle est sa négation?

Il faut amener les élèves à découvrir que sa négation est: «L'objet retiré n'est pas rond ou n'est pas bleu», i.e. $(\neg p \vee \neg q)$

et qu'il est facile de le vérifier par la table:

$\neg(p \wedge q)$		$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee \neg q)$		
0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1

Une tautologie!

On peut remarquer qu'il est facile de dégager la négation d'une proposition composée; il suffit de regarder sa table de vérité.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

C'est ainsi que pour trouver $\neg(p \wedge q)$, on regarde la table:

	p	$\wedge$	q
	1	1	1
fausse →	1	0	0
fausse →	0	0	1
fausse →	0	0	0

La conjonction est fausse dans trois (3) cas; ce que l'on peut exprimer par:

«Lorsqu'au moins une des deux (2) propositions est fausse»:

d'où $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

De la même façon: $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ car dans la table

	p	$\vee$	q
	1	1	1
	1	1	0
	0	1	1
fausse →	0	0	0

de $p \vee q$, on a un seul cas où c'est faux; c'est le cas où, à la fois, p et q sont fausses, ce qui se traduit symboliquement par $(\neg p \wedge \neg q)$.

Il en est de même pour $\neg(p \rightarrow q)$, car dans la table de

	p	$\rightarrow$	q
	1	1	1
fausse →	1	0	0
	0	1	1
	0	1	0

$p \rightarrow q$, il n'y a qu'un cas où la conditionnelle est fausse; c'est lorsque p est vraie et qu'en même temps, q est fausse.

Ce qui se traduit par: $\neg(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Enfin, pour $\neg(p \leftrightarrow q)$, il en résultera:
$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \veebar \neg q)$, car dans la table

	$p \leftrightarrow q$
	1 1 1
fausse →	1 0 0
fausse →	0 0 1
	0 1 0

, les deux (2) cas où $p \leftrightarrow$ est fausse sont lorsque soit la 1re est vraie et la 2e est fausse, soit la 1re est fausse et la 2e est vraie; voilà pourquoi la négation d'une biconditionnelle est logiquement équivalente à une disjonction exclusive des deux (2) négations. Cependant, nous n'utiliserons pas cette dernière dans les exercices, étant donné que la disjonction exclusive est hors programme.

Bien remarquer que toutes ces situations sont des tautologies et qu'il est bon de mentionner que la négation d'une conjonction ainsi que la négation d'une disjonction sont ce qu'on appelle les deux (2) lois de De Morgan.

EXERCICES ET REFERENCES

1) Nie les propositions suivantes:
   a) Le soleil brille.
   b) $2 + 2 = 5 \wedge 3 > 7$
   c) S'il pleut ce soir, alors les Expos ne jouent pas.
   d) $\left[(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)\right]$

2) Complète:
   $\neg(\ldots\ldots\ldots) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

3) Complète:
   $\neg(x > 4 \wedge x \text{ est impair}) \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots$

La logistique, page 102, no 26
page 121, nos 64 à 67

F.I.C., pages 62 et 63 (les numéros laissés à l'item précédent)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 6: Pour trouver l'ensemble solution (1 cours).

Soit l'ensemble de référence suivant:

i.e. l'ensemble des quatre (4) blocs.

J'écris au tableau la forme propositionnelle suivante: «x est un bloc bleu».

En substituant à x chacun des quatre (4) blocs (mes constantes), j'obtiendrai pour:

- le carré bleu, une proposition vraie
- le carré vert, une proposition fausse
- le rond bleu, une proposition vraie
- le rond vert, une proposition fausse.

Une solution d'une forme propositionnelle, c'est un élément du référentiel qui, après substitution dans la forme propositionnelle, fournit une proposition vraie.

L'ensemble solution d'une forme propositionnelle, c'est l'ensemble de toutes les solutions de la forme propositionnelle.

Dans notre exemple, l'ensemble solution est:

Chercher l'ensemble solution d'une forme propositionnelle, c'est, en fait, se déguiser en Colombo et essayer de trouver les coupables (les solutions) parmi un ensemble de suspects (l'ensemble référentiel).

Faire remarquer que depuis des années, les élèves trouvent des ensembles solutions en résolvant des équations ou des

1) Trouve l'ensemble solution des formes propositionnelles suivantes, si l'ensemble référentiel est:
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11, 13, 14\}$
   a) P(x): «x est un nombre pair»
   b) Q(x): «x est divisible par 3»
   c) R(x): «x est un nombre premier»
   d) S(x): «x > 20»
   e) $P(x) \wedge R(x)$
   f) $Q(x) \rightarrow R(x)$
   g) $\neg S(x)$
   h) $\neg R(x) \vee P(x)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
inéquations (qui sont en fait des formes propositionnelles). Il est bon, si l'on travaille avec le référentiel $\mathbb{R}$, d'illustrer, sur la droite numérique, l'ensemble solution obtenu.	2) A) Si $x \in \mathbb{R}$, quel est l'ensemble solution de la forme propositionnelle $x \geqslant 2 \rightarrow x - 7 < 12$? B) Illustre cet ensemble solution sur la droite numérique. Algèbre 3, page 14, nos 18 à 25 Logistique, page 115, nos 51 et 52 page 117, nos 56 à 60 F.I.C., page 53, nos 11 et 12 (a et b) page 54, nos 6 et 7

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 7: Présenter les quantificateurs et donner la valeur de vérité des propositions obtenues (1 cours).

On a déjà dit qu'une forme propositionnelle devient une proposition lorsqu'on remplace la variable par un élément du référentiel. On peut, de plus, transformer une forme propositionnelle en proposition, en quantifiant la variable de la forme propositionnelle, i.e. en spécifiant pour «combien» de constantes la forme propositionnelle deviendra proposition vraie (est-ce pour un, pour quelques-uns, pour tous?).

Partons toujours avec l'ensemble de nos quatre (4) blocs, noté B, et écrivons:
«Tous les blocs de cet ensemble sont bleus».

Evidemment, la 1re réaction des élèves sera de dire: «C'est faux!»... C'est donc dire que ce qui est écrit est une proposition; cette dernière contient un quantificateur (un mot qui exprime une quantité): Tous qu'on appelle quantificateur universel et que l'on symbolise par $\forall$.
La proposition symbolique est:

$\forall x \in B$, x est un bloc bleu

quantificateur — forme propositionnelle

Le tout forme une proposition!

On peut, de la même façon, affirmer:
«Il existe au moins un bloc de l'ensemble qui est bleu».
C'est une proposition car on peut dire que cet énoncé déclaratif est vrai.

1) Traduis en symbole les propositions suivantes, sachant que
   M(x): «x est mortel».
   a) Tous les hommes sont mortels.
   b) Certains hommes sont mortels.
   c) Certains hommes ne sont pas mortels.
   d) Aucun homme n'est mortel.

2) Donne la valeur de vérité des propositions du numéro précédent.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Cette proposition contient également un quantificateur (il ixiste au moins un) qu'on symbolise par $\exists$ et qu'on appelle quantificateur existentiel.

On aura alors, symboliquement: $\exists x \in B$, x est un bloc bleu.

Remarques:
- Des auteurs utilisent également le quantificateur d'unicité ($\exists!$)
  «il existe un et un seul».
- L'expression «il existe au moins un» est souvent remplacée par «certains»; c'est un synonyme en math.

EXERCICES ET REFERENCES

3) Si la variable x appartient à l'ensemble des humains (noté H) et que:
   P(x): «x est juge»
   Q(x): «x est avocat»,
   traduis en mots les propositions suivantes:

   a) $\forall x \in H$, P(x)

   b) $\exists x \in H$, $P(x) \wedge Q(x)$

   c) $\forall x \in H$, $P(x) \rightarrow Q(x)$

   et donne leur valeur de vérité.

4) Soit $B = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
   Dis si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

   a) $\forall x \in B$, $x^2 > x$

   b) $\exists x \in B$, $x + 3 < 7$

Eléments de maths modernes,
page 23, série 1.13
page 30, no 13
page 31, nos 1 à 12

Algèbre 3, nos 26 à 30 (page 15)

Logistique, page 91, nos 3 à 10

Langage logique (PMM-3001),
pages 4-7 et 4-8
pages 4-23 à 4-25

Langage logique et ensembliste, Permama II, pages 2.1.1 à 2.2.2

F.I.C., page 35, nos 7 et 8
page 36, nos 4 à 8
page 53, nos 11 et 12 (3e)
page 55, nos 8 à 10

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE 8: Trouver la négation d'une proposition avec un quantificateur (1 cours).

Soit la proposition suivante: (toujours avec l'ensemble des quatre (4) blocs):

«Tous les blocs sont bleus».

Sa valeur de vérité est fausse. Pourquoi???

Parce que: il existe au moins un bloc qui n'est pas bleu!!

Si maintenant nous prenons cette proposition: «Il existe au moins un bloc rond»;

sa valeur de vérité est VRAIE. Quand sera-t-elle fausse???

Lorsque: Tous les blocs sont non ronds!!

Symboliquement, nous aurons:
$\neg$(tous les blocs sont bleus) $\Leftrightarrow$ il existe au moins un bloc qui n'est pas bleu.
et
$\neg$(il existe au moins un bloc rond) $\Leftrightarrow$ tous les blocs sont non ronds.

On en déduit la règle suivante:

Pour nier une proposition renfermant un quantificateur:
1°) On change le quantificateur $\begin{cases}\forall \text{ par } \exists\\ \exists \text{ par } \forall\end{cases}$
2°) On nie la forme propositionnelle.

Remarque: Faire découvrir à l'élève par des expressions équivalentes que «tous les blocs sont non ronds» peut s'exprimer par: «aucun bloc n'est rond».

1) Nie les propositions suivantes:
   a) Certains élèves de ta classe comprennent la logique.
   b) $\forall x \in \mathbb{N},\ x < 2 \rightarrow x + 4 = 5$

Algèbre 3, page 15, nos 31 et 32

La logistique, page 97, nos 16 à 18
page 107, no 37

Langage logique (PMM-3001), pages 4-37 à 4-50

Langage logique et ensembliste, Permama II, page 2.2.3, no 4

F.I.C., page 81, nos 1 à 8
page 83, nos 1 à 3

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Remarques: A) Etant donné le nombre restreint de cours alloués à cette section (12 cours), nous avons traité l'essentiel du programme.

Si certaines classes se prêtent à de l'enrichissement (on peut toujours rêver!!!), alors certains types de problèmes sont suggérés ci-dessous (... c'est une conditionnelle!!! si l'antécédent est faux, elle peut quand même être vraie!)

1° On peut enrichir en proposant des problèmes avec deux (2) quantificateurs.

Ex.: Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes, sachant que x et $y \in \{0, 1, 2\}$

a) $\forall x \ \exists y, \ x + y = 0$

b) $\exists x \ \exists y, \ x + y = 0$

c) $\exists x \ \forall y, \ x + y = 0$

On retrouvera de ces problèmes dans:
Algèbre 3, page 15, nos 33 à 35
La logistique, page 95, nos 11 et 12
F.I.C., page 83, nos 10 à 12 et page 84, nos 5 à 10

2° On peut aussi faire l'étude de la validité d'un raisonnement à partir des prémisses.
Logique SOEM, feuilles 34 à 54

3° Faire le lien entre l'algèbre des propositions et l'algèbre de Boole.
La logistique, pages 71 à 77

et même avec l'algèbre des circuits (La logistique, pages 78 à 83 et 140-141).

4° On peut aussi aborder des problèmes de types énigmes, jeux logiques, réseaux logiques.

Ex.: Lebrun, Lenoir et Leblanc travaillent ensemble dans une même entreprise. Ils sont, comptable, magasinier et représentant, mais peut-être dans un ordre différent. Sachant que:
- le représentant est célibataire et le plus petit des trois
- Lebrun est le gendre de Lenoir et plus grand que le magasinier,
Trouver le métier de chacun des trois (3) personnages.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Voir document:
Enseignement de notions logiques et ensemblistes PMM-5001, Permma.

Ex.: Si Jean ne va pas à Montréal, alors Henri est absent.
Antoine aime la logique si Danielle est avec lui.
Si Henri est absent, alors Danielle est avec Antoine.

Prouver que: Si Antoine aime la logique, alors Jean va à Montréal.

Voir: La logistique, Marcel Schoos, pages 129, 130 et 131.

B) En plus des manuels déjà mentionnés pour les exercices de références, vous pouvez aussi en trouver d'intéressants dans le cahier de la logique, collection Chambly (Charlebois, Filion-Gagnon) par Holt, Rinehart et Winston,

de même que: Introduction à la mathématique (Collette et Laliberté) par Editions du Renouveau Pédagogique.